

**Федеральное государственное образовательное бюджетное
учреждение высшего образования
«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

**Департамент анализа данных и машинного обучения
Факультета информационных технологий и анализа больших данных**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной
и методической работе

_____ Е.А. Каменева

25.04.2023 г.

Савинов Е.А.

Теория случайных процессов

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика,
ОП «Прикладная математика и информатика»
(Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах)

*Рекомендовано Ученым советом
Факультета информационных технологий и анализа больших данных
(протокол №31 от 18.04.2023г.)*

*Одобрено Советом учебно-научного
Департамента анализа данных и машинного обучения
(протокол №2 от 29.03.2023г.)*

Москва 2023

Содержание

1. Наименование дисциплины	2
2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине.	2
3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	3
4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	3
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	4
5.1. Содержание дисциплины	4
5.2. Учебно-тематический план.....	5
5.3. Содержание семинаров, практических занятий.....	5
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	7
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы.....	7
6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю.....	8
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	11
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	24
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	25
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	25
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	26
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	26

1. Наименование дисциплины

«Теория случайных процессов».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине.

Дисциплина «Теория случайных процессов» обеспечивает формирование следующих компетенций: ПКП-1, ПКП-2

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ПКП-1	Способность анализировать финансовую информацию, рассчитывать финансовые показатели, в том числе, в условиях неопределенности	1. Владеет методиками расчета финансовых показателей, в том числе в условиях неопределенности.	Знать формулы расчета характеристик основных моделей случайных процессов Уметь проводить аналитические преобразования с учетом свойств модели, рассчитывать вероятности различных событий, связанных с рисками;
		2. Рассчитывает и интерпретирует финансовые показатели на основе финансовой информации.	Знать физический или экономический смысл характеристик основных моделей случайных процессов Уметь объяснить последствия изменения характеристик модели;
		3. Анализирует финансовую информацию, представленную в различной форме, с использованием современного инструментария.	Знать принципы и методы имитационного моделирования; Уметь анализировать данные, полученные при имитационном моделировании;
ПКП-2	Способность моделировать и оценивать риски финансово-экономической деятельности, в том числе, инвестиционной и	1. Владеет знаниями в области теории и методологии моделирования и оценивания рисков финансово-экономической деятельности	Знать инструменты моделирования и характеристические свойства основных моделей случайных процессов Уметь применять инструменты моделирования, тестировать и отлаживать расчеты

	актуарной деятельности	2.Демонстрирует умение строить математические модели в области экономики и финансов.	<u>Знать</u> основные классы, свойства и характеристики случайных процессов, используемых при моделировании экономических явлений; <u>Уметь</u> рассчитывать параметры математической модели
		3.Оценивает финансовые риски финансово-экономической деятельности, в том числе инвестиционной и актуарной деятельности.	<u>Знать</u> свойства и особенности основных моделей случайных процессов <u>Уметь</u> оценивать параметры имитационных моделей

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Теория случайных процессов» относится к Циклу профиля (Элективный) Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, ОП «Прикладная математика и информатика».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 7 (в часах)
Общая трудоемкость дисциплины	3 з/е, 108 ч.	108
Контактная работа - Аудиторные занятия	50	50
<i>Лекции</i>	16	16
<i>Семинары, практические занятия</i>	34	34
Самостоятельная работа	58	58
Вид текущего контроля	контрольная работа	контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	экзамен	экзамен

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

1. Введение в теорию случайных процессов

Общее понятие условного математического ожидания и условной вероятности. Формулы для специальных случаев. Основные понятия, связанные со случайными процессами, примеры, конечномерные распределения, согласованность.

2. Цепи Маркова

Конечномерные распределения дискретной цепи Маркова. Независимость будущего и прошлого при известном настоящем. Матрица переходных вероятностей. Примеры. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Эргодическая теорема для цепей Маркова с дискретным временем. Цепи Маркова с непрерывным временем.

3. Элементы теории массового обслуживания

Простейший поток событий. Одноканальные и многоканальные системы обслуживания.

4. Процесс Пуассона и его свойства

Пуассоновский процесс как процесс восстановления. Случайное блуждание с показательными шагами. Свойства процесса Пуассона. Парадокс инспектора. Эквивалентное определение. Ковариационная функция. Непрерывность в среднем квадратичном. Процесс Пуассона как марковская цепь. Мартингальность центрированного процесса Пуассона. Наилучший в среднем квадратичном прогноз.

5. Винеровский процесс и его свойства

Определение и существование. Винеровский процесс как непрерывное случайное блуждание. Броуновское движение как гауссовский процесс. Непрерывность в среднем квадратичном. Марковское свойство и мартингальность винеровского процесса.

6. Случайные блуждания

Траектории простых случайных блужданий. Принцип отражения. Моменты остановки. Законы арксинуса. Предельная теорема для максимума случайного блуждания на отрезке.

5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоёмкость в часах					Формы текущего контроля успеваемости
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоя тельная работа	
			Общ ая, в т.ч.:	Лекц ии	Семина ры, практиче ские занятия		
1.	Введение в теорию случайных процессов	12	6	2	4	6	Самостоятельные работы. Участие в решении задач на практических занятиях. Собеседования по домашним заданиям.
2.	Цепи Маркова	29	13	4	9	16	
3.	Элементы теории массового обслуживания	14	6	1	5	8	
4.	Процесс Пуассона и его свойства	25	11	3	8	14	
5.	Винеровский процесс и его свойства	18	8	2	6	10	
6.	Случайные блуждания	10	6	4	2	4	
	В целом по дисциплине	108	50	16	34	58	Согласно учебному плану: контрольная работа
	Итого в %		46	32	68	54	

5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарских, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8,9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
--	---	--------------------------

Введение в теорию случайных процессов	1. Условные математические ожидания и условные вероятности относительно разбиений, сигма-алгебр и случайных величин. Свойства условных математических ожиданий. Подсчет условных математических ожиданий и условных вероятностей относительно дискретных и абсолютно-непрерывных случайных величин. 2. Конечномерные распределения и траектории явно заданных случайных процессов. Рекомендуемые источники: п.8, [3], [4]	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Цепи Маркова	3. Конечномерные распределения дискретной цепи Маркова. Вычисление вероятностей событий, содержащих траектории с определенными свойствами. 4. Построение матрицы переходных вероятностей. Вычисление переходных вероятностей за 2 шага. 5. Диагонализация стохастической матрицы. Переходные вероятностей за n шагов. Вычисление распределения n-го звена цепи. 6. Стационарное распределение. 7. Определение типа марковской цепи, определение типов состояний. 8. Стационарное распределение марковской цепи с непрерывным временем. 9. Дифференциальные уравнения Колмогорова 10. Матричная экспонента Рекомендуемые источники: п.8, [2], [3], [4]	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Элементы теории массового обслуживания	11. Простейший поток. 12. Одноканальные системы массового обслуживания с ограниченной очередью. 13. Многоканальные системы массового обслуживания с ограниченной очередью. Рекомендуемые источники: п.8, [2]	

Процесс Пуассона и его свойства	14. Распределение сечений процесса Пуассона. Вычисление условных и безусловных вероятностей событий измеримых относительно сечений процесса Пуассона. 15. Распределения функций от сечений процесса Пуассона и их характеристики. Рекомендуемые источники: п.8, [1], [3]	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Винеровский процесс и его свойства	16. Ковариационная функция функционала от винеровского процесса 17. Распределение функций от сечений винеровского процесса 18. Моделирование винеровского процесса и геометрического броуновского движения. Рекомендуемые источники: п.8, [1]	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений
Случайные блуждания	19. Моделирование случайного блуждания. Оценки распределений моментов остановки, времени пребывания и максимумов. 20. Оценки вероятности разорения Рекомендуемые источники: п.8, [3], [4]	Интерактивная форма, Практикум по решению задач по тематике занятия в малых группах (2-4 студента) и коллективное обсуждение решений

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Введение в теорию случайных процессов	Теорема Радона-Никодима, теорема о существовании условного математического ожидания. Теорема Колмогорова.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.

Цепи Маркова	Классификация состояний марковской цепи с дискретным временем. Классификация марковских цепей.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Элементы теории массового обслуживания	СМО с неограниченной очередью	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Процесс Пуассона и его свойства	Дважды стохастический процесс Пуассона (процесс Кокса).	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Винеровский процесс и его свойства	Непрерывность и п.н. недифференцируемость траекторий. Неограниченность вариации. Принцип отражения.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Случайные блуждания	Задача о разорении.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примерные вопросы к контрольной работе

1. Что такое цепь Маркова с дискретным временем?
2. Какие цепи называются однородными?
3. Какими свойствами обладает матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова?
4. Формула конечномерных распределений однородной цепи.
5. Уравнения Колмогорова-Чепмена.
6. Как найти матрицу переходов за n шагов?
7. Как найти распределение состояний на шаге n однородной цепи Маркова?
8. Что такое стационарное распределение однородной марковской цепи с дискретным временем? Каковы его свойства?
9. Матрица переходных интенсивностей.
10. Стационарное распределение марковской цепи с непрерывным временем.

11. Дифференциальные уравнения Колмогорова. Распределение сечений марковской цепи с непрерывным временем.

12. Матрица переходных интенсивностей в многоканальной системе обслуживания с ограниченной очередью.

Примерные задания контрольной работы

1. Пусть $(1, 2, 3)$ – возможные состояния системы, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ – матрица

переходных вероятностей за один шаг. Построить граф, соответствующий матрице P .

2. Матрица вероятностей перехода цепи Маркова $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Начальное распределение задается вектором $\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Найти вероятность того, что через 3 шага состояние цепи будет равно 2.

3. Дана матрица переходных вероятностей марковской цепи: $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Найти стационарное распределение цепи.

4. Урна содержит 3 белых шара. Определим операцию замены следующим образом: случайным образом вынимаем один шар и заменяем его черным с вероятностью p и белым с вероятностью $q = 1 - p$. Обозначим через X_n число белых шаров в урне после n замен. Найти матрицу переходных вероятностей марковской цепи $\{X_n\}$. Приблизленную вероятность того, что после бесконечно большого числа замен в урне будет 3 черных шара.

5. Данные, полученные при исследовании рынка ценных бумаг, показали, что рыночная цена одной акции акционерного общества может колебаться в

пределах от 1 руб. до 10 руб. Будем интересоваться следующими состояниями, характеризующимися рыночной ценой акции: S1 - 1–4 руб.; S2 - 4–7 руб.; S3 - 7–9 руб.; S4 - 9–10 руб. Замечено, что рыночная цена акции в будущем существенно зависит от ее цены в текущий момент времени. При этом в силу случайных воздействий рынка изменение цены может произойти в любой случайный момент времени. Матрица интенсивностей переходов имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -10 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Составить долгосрочный прогноз рыночной цены акции и ответить на вопрос: стоит ли приобретать акции по цене 4 руб. за шт.?

6. Машина требует наладки в среднем раз в 2 часа. Наладка занимает в среднем 15 минут. Найти зависимость распределения вероятностей рабочего/нерабочего состояний от времени, если в начальный момент времени машина работала (время бесперебойной работы и время наладки считать независимыми и распределенными по показательному закону).

7. Имеются 4 машины, каждая из которых выходит из строя в среднем раз в 2 часа. Найти среднее время наладки, при котором вероятность того, что все машины находятся в рабочем состоянии, составляет не менее 75%. Каждая машина выходит из строя и обслуживается независимо от других (время бесперебойной работы и время обслуживания считаются экспоненциальными). Ответ дать в минутах с точностью до десятых долей.

Критерии бальной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержится в соответствующих методических рекомендациях Департамента анализа данных и машинного обучения.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по данной дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, знаний и умений

Наименование компетенции	Наименование индикаторов достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции	Типовые контрольные задания
Способность анализировать финансовую информацию, рассчитывать финансовые показатели, в том числе, в условиях неопределенности (ПКП-1)	1. Владеет методиками расчета финансовых показателей, в том числе в условиях неопределенности.	<u>Знать</u> формулы расчета характеристик основных моделей случайных процессов <u>Уметь</u> проводить аналитические преобразования с учетом свойств модели, рассчитывать вероятности различных событий, связанных с рисками	Условие А. Предположим, что поток покупателей, делающих покупки в магазине, подчиняется процессу Пуассона с постоянной интенсивностью. В начале дня кассир делает покупку себе и выбивает чек с нулевым номером. Чеки покупателей имеют номера, начинающиеся с первого. Сумма, записанная в k-ом по счету чеке, является случайной с показательным распределением и средним значением $1/(k+1)$. Эта сумма не зависит от всех остальных сумм, от момента прихода покупателя в магазин

			и не влияет на момент прихода следующего покупателя. В рамках условия А 1) Записать формулу плотности распределения суммы на k-м чеке. 2) Найти функцию распределения суммы, зафиксированной на последнем чеке к моменту t.
	2. Рассчитывает и интерпретирует финансовые показатели на основе финансовой информации.	<u>Знать</u> физический или экономический смысл характеристик основных моделей случайных процессов <u>Уметь</u> объяснить последствия изменения характеристик модели	В рамках условия А 1) охарактеризуйте показатель интенсивности потока покупателей 2) в какой момент времени вероятность превышения суммы на последнем чеке 2 у.е. упадет ниже 1/10?
	3. Анализирует финансовую информацию, представленную в различной форме, с использованием современного инструментария.	<u>Знать</u> принципы и методы имитационного моделирования; <u>Уметь</u> анализировать данные, полученные при имитационном моделировании;	В рамках условия А 1) построить имитационную модель, описывающую зависимость выручки магазина от времени при случайной интенсивности потока покупателей, определяемой однородной цепью Маркова с известными параметрами 2) привести примеры некоторые из

			случайных событий, способных произойти при заданном наборе характеристик модели. Оценить вероятности возникновения этих событий
Способность моделировать и оценивать риски финансово-экономической деятельности, в том числе, инвестиционной и актуарной деятельности (ПКП-2)	1. Владеет знаниями в области теории и методологии моделирования и оценивания рисков финансово-экономической деятельности.	Знать инструменты моделирования и характеристические свойства основных моделей случайных процессов Уметь применять инструменты моделирования, тестировать и отлаживать расчеты	Условие Б. $k+2$ рабочих обслуживают машину, состоящую из $m+k+2$ блоков. Каждый блок требует обслуживания в среднем раз в $r + 1$ часов. Обслуживание занимает в среднем $1/(l + 2)$ часа (время бесперебойной работы и время обслуживания считаются экспоненциальными, величины k, m, r, l заданы). В рамках условия Б: 1) Построить алгоритм процесса выхода из строя и ремонта блоков машины 2) реализовать алгоритм на языке Python
	2. Демонстрирует умение строить математические модели в области экономики и финансов.	Знать основные классы, свойства и характеристики случайных процессов, используемых при моделировании экономических явлений; Уметь рассчитывать параметры	В рамках условия Б: 1) охарактеризуйте процессы изменения количества неработающих блоков, числа отремонтированных блоков (за время ремонта) 2) построить матрицу переходных

		математической модели	интенсивностей системы
	3.Оценивает финансовые риски финансово-экономической деятельности, в том числе инвестиционной и актуарной деятельности.	<u>Знать</u> свойства и особенности основных моделей случайных процессов <u>Уметь</u> оценивать параметры имитационных моделей	В рамках условия Б: 1) как рассчитать оценки основных численных характеристик данной системы? 2) численно оценить теоретическое стационарное распределение числа работающих блоков и среднюю длину очереди в стационарном режиме

Примеры тестовых заданий

1. Случайным процессом на $T = [0, +\infty)$ называется

1. семейство функций $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in T\}$
2. семейство случайных величин $\{X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \in T\}$
3. семейство функций от времени $\{X(t, \omega): T \rightarrow \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$
4. ни один из перечисленных ответов не является верным

2. Если $X(t, \omega): T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ случайный процесс, то функция $X(t, \omega)$ при фиксированном $t \in T$ называется

1. траекторией
2. сечением
3. мартингалом
4. случайным блужданием

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ последовательность независимых случайных величин. Случайная последовательность $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, где $S_0 := 0, S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$

1. не является цепью Маркова
2. является процессом восстановления
3. является случайным блужданием
4. состоит из независимых случайных величин

4. Семейство конечномерных распределений $\{P_{t_1, \dots, t_m}, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m, m \in \mathbb{N}\}$ называется согласованным, если

1. $P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(A \times \mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
2. $P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(\mathbb{R} \times A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$
3. $P_{t_1, \dots, t_m}(\mathbb{R}^m) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(\mathbb{R}^{m+1})$
4. $P_{t_1, \dots, t_m}(A) = P_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}}(B), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+1})$

5. Для произвольной цепи Маркова с дискретным временем $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$, марковское свойство при $P\{\xi_0 = i_0, \dots, \xi_k = i_k\} > 0$ записывается как

1. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k\}$
2. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k \mid \xi_0 = i_0\}$
3. $P\{\xi_0 = i_0 \mid \xi_1 = i_{k-1}, \dots, \xi_k = i_k\} = P\{\xi_0 = i_0 \mid \xi_k = i_k\}$
4. $P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}\}$

6. Для однородной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ при условии существования соответствующих условных вероятностей необходимо выполняется следующее равенство

1. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 1\}$
2. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_3 = 2 \mid \xi_2 = 3\}$
3. $P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_3 = 3 \mid \xi_2 = 2\}$

$$4. P\{\xi_2 = 3 \mid \xi_1 = 2\} = P\{\xi_2 = 2 \mid \xi_1 = 3\}$$

7. P и $P(n)$ матрицы переходных вероятностей однородной марковской цепи за 1 и n шагов соответственно. Какое утверждение ошибочно?

$$1. P(n) = P(n-1) \cdot P$$

$$2. P(n) = P \cdot P(n-1)$$

$$3. P(n) = P^n$$

$$4. P \text{ и } P(n) \text{ невырожден}$$

8. Пусть последовательность состояний человека (здоров/болен) описывается однородной цепью Маркова. Здоровый человек заболевает на след. день с вероятностью $1/2$, а больной выздоравливает с вероятностью $1/3$. В 1-й день состояния равновозможны. Какова вероятность, что человек здоров на третий день?

$$1. 29/72$$

$$2. 30/72$$

$$3. 36/72$$

$$4. 43/72$$

9. Пусть P и $P(n) = (p_{ij}(n))$ матрицы (размера $k \times k$) переходных вероятностей однородной цепи Маркова за 1 и n шагов соответственно. Распределение $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ называется стационарным, если

$$1. \pi P = \pi$$

$$2. \exists \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_j$$

$$3. \pi_1 = \dots = \pi_k$$

$$4. \pi_1 = 1, \pi_2 = 0, \dots, \pi_k = 0$$

10. Обозначим $p_k(s, t)$ вероятность появления ровно k событий на отрезке времени $[s, t]$ при простейшем потоке. Какое соотношение не выполняется?

$$1. p_0(2,3)p_0(1,2) = p_0(1,3)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} p_k(0, 1/n) = 0$$

$$3. [p_0(0,1)]^t = p_1(0, t)$$

$$4. p_2(2,3) = p_2(1,2)$$

11. Какое равенство иллюстрирует свойство стационарности простейшего потока

$$1. p_0(2,3)p_0(1,2) = p_0(1,3)$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=2}^{\infty} p_k(0, 1/n) = 0$$

$$3. [p_0(0,1)]^t = p_1(0, t)$$

$$4. p_2(2,3) = p_2(1,2)$$

12. Процессом Пуассона называется

1. случайное блуждание с показательными шагами
2. процесс восстановления, соответствующий пункту 1
3. случайное блуждание с нормальными шагами
4. процесс восстановления, соответствующий пункту 3

13. Указать неверное утверждение относительно процесса Пуассона $\{N_t\}$ с интенсивностью $\lambda > 0$

$$1. P\{N_0 = 0\} = 1$$

$$2. P\{N_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$3. P\{N_t - N_s = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$$

$$4. EN_1 = \lambda$$

14. Пуассоновский процесс не является

1. мартингалом
2. цепью Маркова
3. неубывающим п.н.
4. с незав. приращениями

15. Длины отрезков времени между скачками процесса Пуассона

1. зависимы
2. независимы
3. имеют показательные распределения
4. имеют пуассоновские распределения

16. Определить множитель A в формуле двумерного распределения процесса Пуассона ($s < t$, $k \leq n$) $P\{N_s = k, N_t = n\} = \frac{s^k}{k!(n-k)!} e^{-\lambda t} \cdot A$

1. $A = t^{n-k} \lambda^n$
2. $A = t^{n-k} \lambda^k$
3. $A = (t - s)^{n-k} \lambda^n$
4. $A = (t - s)^{n-k} \lambda^k$

17. Какое равенство для винеровского процесса $\{W_t\}$ при $s < t$ неверно

1. $DW_t = t$
2. $D(W_t - W_s) = t - s$
3. $D(W_t + W_s) = t + s$
4. $D(W_t + W_s) = t + 3s$

18. Винеровский процесс иногда называют непрерывным случайным блужданием, потому что он

1. является случайным блужданием (СБ)
2. является интерполированным СБ (ИСБ)

3. асимптотически по распределению близок к ИСБ
4. имеет всегда непрерывные траектории

19. В каком случае вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ не обязан быть гауссовским?

1. все ξ_i гауссовские
2. все ξ_i независимые гауссовские
3. $\varphi_\xi(\lambda) = \exp\{-1/2 \langle C\lambda, \lambda \rangle\}$, где матрица $C = C^t$, $C \geq 0$
4. для любого $\tau \in \mathbb{R}^m$: $\sum_{k=1}^m \tau_k^2 > 0$ величина $\langle \tau, \xi \rangle$ гауссовская

20. Какой набор утверждений для $\{W_t\}$ однозначно определяет винеровский процесс

1. W_t гауссовский, приращ. незав.
2. $W_0 = 0$ a.s., $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, $s < t$, приращ. незав.
3. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, $s < t$, $cov(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$
4. W_t гауссовский, $EW_t = 0$, $cov(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$

21. Плотность двумерного распределения винеровского процесса (при $0 < s < t$) имеет вид

1. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t-s} + \frac{(y-x)^2}{t}\right)\right\}$
2. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s} + \frac{(y-x)^2}{t-s}\right)\right\}$
3. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi(t-s)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{x^2 + (y-x)^2}{t-s}\right\}$
4. $g_{s,t}^W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{st}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{s} + \frac{y^2}{t}\right)\right\}$

22. Какое из следующих соотношений описывает свойство мартингалности винеровского процесса $\{W_t\}$?

1. $\lim_{t \rightarrow t_0} E(W_t - W_{t_0})^2 = 0$
2. $g_{t_{n+1}|t_1, \dots, t_n}^W(x_{n+1} | x_1, \dots, x_n) = g_{t_{n+1}|t_n}^W(x_{n+1} | x_n)$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} g_{t|u}^W(z | y) g_{u|s}^W(y | x) dy = g_{t|s}^W(z | x)$$

$$4. E(W_{t_{n+1}} | W_{t_1} = x_1, \dots, W_{t_n} = x_n) = x_n$$

23. Пусть $\{S_n\}$ простое симметричное случайное блуждание (с равновероятными шагами 1 и -1), начинающееся в нуле, $\mu(n)$ и $\tau(n)$ соответственно время пребывания S_n в положительной полуплоскости и момент последнего попадания в ноль на отрезке времени $[0, n]$. Укажите неверное утверждение ($n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$)

$$1. P\{S_{2n} = 0\} = P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\}$$

$$2. P\{\mu(2n) = 2k\} = P\{S_{2k} = 0\}P\{S_{2n-2k} = 0\}$$

$$3. P\{\tau(2n) = 2k\} = P\{S_{2k} = 0\}P\{S_{2n-2k} = 0\}$$

$$4. P\{S_{2n} = 0\} = 2^{-2n} C_{2n}^n$$

24. В условиях предыдущего вопроса обозначим $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$. Укажите верное утверждение. При $n \rightarrow \infty$

$$1. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \quad x \in [0, 1]$$

$$2. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x > 0$$

$$3. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin x, \quad x \in [0, 1]$$

$$4. P\left\{\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

25. Пусть N_t процесс Пуассона с интенсивностью λ . Найти ковариационную функцию $R(s, t)$ случайного процесса $X_t = 2^{N_t}$, $s < t$

$$1. e^{\lambda(t-s)}$$

$$2. e^{\lambda(t+s)}(e^{\lambda s} - 1)$$

$$3. e^{\lambda(t+s)}$$

$$4. e^{\lambda(t-s)}(e^{\lambda s} - 1)$$

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Условные математические ожидания и условные вероятности относительно сигма-алгебр и случайных величин.
2. Понятие случайного процесса. Примеры.
3. Конечномерные распределения случайных процессов. Теорема Колмогорова.
4. Цепь Маркова с дискретным временем. Однородность. Конечномерные распределения однородной цепи. Примеры.
5. Матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова. Уравнения Колмогорова-Чепмена. Состояние цепи на шаге "n".
6. Предельная теорема для цепей Маркова. Стационарная марковская цепь.
7. Цепь Маркова с непрерывным временем.
8. Стохастическая непрерывность.
9. Матрица переходных интенсивностей.
10. Дифференциальные уравнения Колмогорова.
11. Распределение сечения цепи Маркова с непрерывным временем.
12. Стационарное распределение цепи Маркова с непрерывным временем.
13. Простейший поток событий. Промежуток времени между ближайшими событиями.
14. Распределение числа событий в простейшем потоке как решение соответствующего дифференциального уравнения.
15. Матрица переходных интенсивностей процесса Пуассона.
16. Многоканальная система обслуживания с ограниченной очередью.

17. Процесс Пуассона как процесс восстановления. Траектории. Одномерные сечения пуассоновского процесса.

18. Наблюдение процесса Пуассона, начиная с ненулевого момента времени. Связь с приращениями исходного процесса Пуассона.

19. Свойство отсутствия памяти у показательного распределения.

20. Независимость приращений процесса Пуассона.

21. Конечномерные распределения процесса Пуассона.

22. Ковариационная функция, непрерывность в среднем квадратичном процессе Пуассона.

23. Марковское свойство процесса Пуассона.

24. Мартингальность центрированного процесса Пуассона.

25. Характеристическая функция случайного вектора. Единственность. Х.ф. вектора с независимыми компонентами.

26. Согласованность семейства распределений в терминах характеристических функций.

27. Определение винеровского процесса. Теорема о существовании.

28. Многомерное гауссовское распределение: плотность, характеристическая функция. Параметры гауссовского распределения.

29. Гауссовский вектор. Критерий гауссовости.

30. Определение винеровского процесса как гауссовского. Конечномерные распределения винеровского процесса.

31. Непрерывность в среднем квадратичном, марковское свойство винеровского процесса.

32. Переходная функция, переходная плотность винеровского процесса.

Уравнения Колмогорова-Чепмена.

33. Мартингальность винеровского процесса

34. Простое симметричное случайное блуждание. Принцип отражения.

Вероятность невозвращения в нулевое состояние.

35. Законы арксинуса для случайного блуждания.

36. Асимптотика максимума случайного блуждания.

Пример экзаменационного билета

**Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования**

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»
(Финансовый университет)**

Департамент анализа данных и машинного обучения

Дисциплина Теория случайных процессов

Факультет информационных технологий и анализа больших данных

Форма обучения очная

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах

Учебный год 20__/20__ семестр _____

Задание 1. (20 баллов)

Цепь Маркова с непрерывным временем.

Задание 2. (20 баллов)

Решить задачу.

Машина требует наладки в среднем раз в 2 часа. Наладка занимает в среднем 15 минут.

Найти зависимость распределения вероятностей рабочего/нерабочего состояний от времени, если в начальный момент времени машина работала (время бесперебойной работы и время наладки считать независимыми и распределенными по показательному закону).

Задание 3. (20 баллов)

Используя Python, построить модель винеровского процесса на отрезке $[0,1]$. Численно оценить распределение (построить эмпирическую функцию распределения) доли времени, когда процесс находился в верхней полуплоскости.

Подготовил: _____

Заместитель руководителя _____

Дата _____

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная:

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — Москва : Юстиция, 2018. — 480 с. — ЭБС BOOK.ru. — URL: <https://www.book.ru/book/927024> (дата обращения: 18.05.2023). — Текст : электронный.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах: учебник / Е. С. Вентцель. — Москва : Юстиция, 2018. — 658 с. - ЭБС BOOK.ru. — URL: <https://www.book.ru/book/924283> (дата обращения: 18.05.2023). - Текст : электронный.

б) дополнительная:

3. Ширяев, А. Н. Вероятность-1: Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : МЦНМО, 2007. — 552 с. — ЭБС Университетская библиотека online. — URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63256&sr=1 (дата обращения: 18.05.2023). — Текст : электронный.

4. Ширяев, А. Н. Вероятность-2: Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи: в 2-х кн. / А. Н. Ширяев. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : МЦНМО, 2007. — 416 с. - ЭБС Университетская библиотека online. — URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=63257&sr=1 (дата обращения: 18.05.2023). — Текст : электронный.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Информационно-образовательный портал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации <http://portal.ufrf.ru/>
2. Сайт департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий. http://fa.ru/dep/data_analysis
3. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
(<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
5. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
6. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>
7. Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.com>
8. Электронно-библиотечная система издательства «Лань»
<https://e.lanbook.com/>
9. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
10. Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ»
<https://www.biblio-online.ru/>
11. Деловая онлайн библиотека» издательства «Альпина Паблишер»
<http://lib.alpinadigital.ru/en/library>
12. Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>
13. Лебедев А. В. Теория вероятностей и математическая статистика:
учебник /А. В. Лебедев, Л.Н. Фадеева. — 4-е изд.- Москва: 2018. — 480
с. – URL: <https://istina.msu.ru/publications/book/120811137/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов проходит аудиторно и внеаудиторно. Организации самостоятельной работы служит учебно-тематический план изучения дисциплины. В этом плане указана тематика лекций, практических занятий, вопросы и задания для самостоятельного изучения.

Домашние задания следует выполнять регулярно при подготовке к практическим занятиям. Контроль выполнения домашних заданий осуществляется в ходе практических занятий в процессе выборочного собеседования.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:

- 1.Пакет офисных программ
- 2.Антивирус Kaspersky

11.2. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
- 4.Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» -

<http://www.skrin.ru/>

11.3. Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации – не предусмотрены

11.4. Программная среда R с интерфейсом RStudio.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Аудитории для проведения занятий. Компьютерный класс для проведения части семинаров и зачета.